

РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОЛИТА В МЕЖЭЛЕКТРОДНОМ ЗАЗОРЕ

В.Г. Насибулин

*Казанский государственный университет
Valery.Nasiboulin@ksu.ru*

Постановка задачи. Рассмотрим течение электролита в межэлектродном зазоре (МЭЗ), образующемся в процессе стационарной электрохимической размерной обработки (ЭХРО) металлов. Требуется определить все характеристики плоского движения жидкости. При решении подобной задачи, вообще говоря, необходимо учитывать взаимное влияние электрических и гидродинамических процессов. В настоящей работе используется упрощенная модель, в рамках которой не учитывается влияние гидродинамических процессов на электрические процессы.

Решение поставленной задачи можно свести к последовательному решению нескольких задач:

определение стационарного МЭЗ;

построение конформной и ортогональной сетки для численного решения гидродинамической части задачи;

численное определение гидродинамики несжимаемого электролита на основе уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим подробнее каждый из этих этапов на примере задачи об электрохимическом формообразовании плоским катодом в виде прямого угла с изоляцией вдоль боковой грани (рис. 1а).

Итак, на первой стадии необходимо найти форму МЭЗ. При решении данной задачи воспользуемся ее гидродинамической интерпретацией [1]. В такой постановке проблема определения МЭЗ сводится к нахождению части неизвестной границы фиктивного потока идеальной несжимаемой жидкости по заданному на ней условию стационарности процесса $V_z = \cos \theta$, здесь и далее используются безразмерные переменные, V_z — модуль скорости фиктивного потока, θ — угол наклона вектора скорости \vec{V}_z .

Приведем одно простое аналитическое решение этой задачи. Поставим в соответствие области G_z полукруг единичного радиуса $G_t = \{ |t| \leq 1, \operatorname{Im} t \geq 0 \}$ (рис. 1б). В плоскости комплексного потенциала

W_3 области G_z соответствует полубесконечный прямоугольник G_{w_3} (рис. 1в).

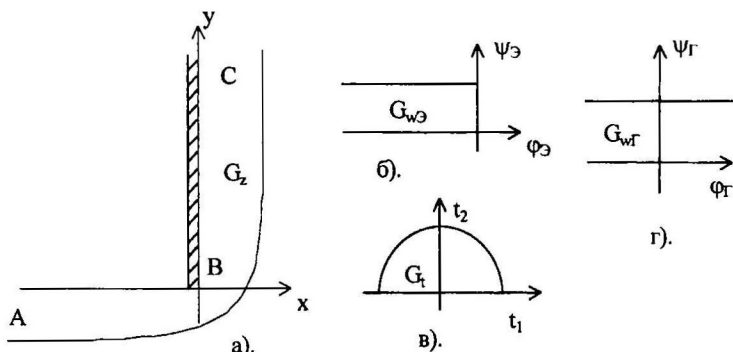


Рис. 1.

Используя интеграл Кристоффеля-Шварца и формулу Жуковского [2], найдем функцию, конформно отображающую область G_{w_3} на область

G_t в виде $W_3 = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{1-t+\sqrt{-4t}}{1+t} + \varphi_{31}$. Здесь φ_{31} — значение потенциала скорости в точке C (эта величина определится в ходе решения).

Рассмотрим аналитическую функцию

$F(t) = i(z(t) - W_3(t) + i) - \frac{\varphi_{31}}{\pi} \operatorname{Ln} t + \varphi_{31}i$, не имеющую особенностей внутри G_t . Легко видеть, что на границе области G_t мнимая часть этой функции обращается в нуль. Значит, функция равна нулю и внутри области G_t . Отсюда получим

$$z(t) = W_3(t) - i - \frac{\varphi_{31}i}{\pi} \operatorname{Ln} t - \varphi_{31}. \quad (1)$$

Из условия нарушения конформности отображения $z(t)$ в точке

$B \left(\frac{dz}{dt} \Big|_{t=1} = 0 \right)$ найдем, что неизвестный параметр $\varphi_{31} = 1$. Тогда

форма анодной границы AC будет описываться уравнением $y = -1 + \frac{4}{\pi} \operatorname{Arcth} \left[\operatorname{Exp} \frac{\pi(1-x)}{2} \right]$. Можно заметить, что эта кривая симметрична относительно линии $y = -x$, причем боковой зазор

$h_1 = x|_{y=0}$ совпадает с торцевым зазором $h_2 = |y|_{x=0}$ и задается величиной $1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Ln} \left(\operatorname{Th} \frac{\pi}{4} \right)$.

На втором этапе рассмотрим задачу построения сетки, используемой при численном определении характеристик движения жидкости в криволинейном МЭЗ. Как известно [3], линии сетки удобнее выбирать так, чтобы они совпали с линиями тока эквивалентной задачи потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости в канале.

Областью изменения комплексного потенциала W_F будет полоса G_{w_F} (рис. 1г). Чтобы построить линии тока движения идеальной жидкости в канале достаточно найти конформное отображение области G_{w_F} на область G_z . Поскольку функция $z(t)$ уже известна, то удобнее построить отображение канонической области G_{w_F} на каноническую область G_t в виде $W_F(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{(1+t)^2}{-4t}$. Обращая эту формулу, найдем

$$i(W_F) = -1 - 2 \operatorname{Exp}(\pi W_F) + 2 \operatorname{Exp} \left(\frac{\pi W_F}{2} \right) \sqrt{1 + \operatorname{Exp}(\pi W_F)}. \quad (2)$$

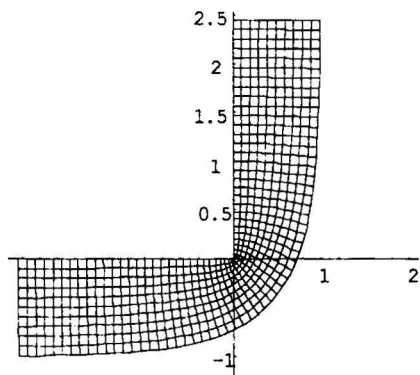


Рис. 2.

Тогда $z(W_F)$ можно найти на основе (1) и (2). Построенная таким образом сетка (семейство ортогональных линий тока и изолиний) приведена на рис. 2.

Интересно отметить, что модуль скорости

$$V_F = \frac{dW_F}{dz} = \frac{dW_F}{dt} \frac{dt}{dz} = i \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}$$

и обращается в единицу на границе АС. На рис. 3 приведено поле скоростей идеальной жидкости в МЭЗ.

На третьем этапе численно решаем уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости в переменных “функция тока - завихренность” в области G_{w_F} , где можно построить простую регулярную сетку. Якобиан преобразования J , который используется при записи уравнений относительно

расчетных координат ($\xi = \varphi_r, \eta = \psi_r$), имеет достаточно простой вид и совпадает с квадратом модуля скорости V_r^2 . Окончательно, система уравнений Навье-Стокса имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega UJ)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\omega VJ)}{\partial \eta} = \frac{J}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -J\omega.$$

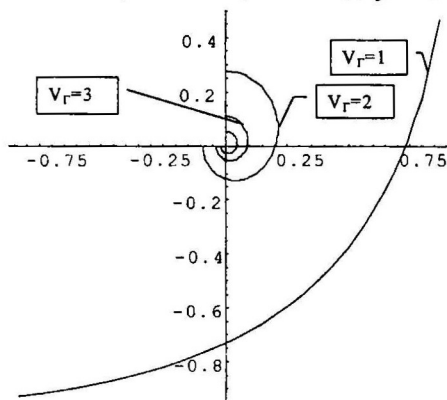


Рис. 3.

Здесь t — время, U, V, ψ, ω — соответственно компоненты вектора скорости, функция тока и завихренность потока вязкой несжимаемой жидкости, Re — число Рейнольдса.

Уравнения Навье-Стокса решались численно методом ADI [3], некоторые расчеты представлены на рис. 4,5 (линии тока и поле скорости

при $\text{Re}=300$). Хорошо заметно, что и линии тока, и поле скоростей вязкой жидкости существенно отличаются от соответствующих величин для идеальной жидкости (см. рис. 2,3). В частности, около точки B поток жидкости отрывается и линии тока основного течения существенно искажаются за счет возникновения стоячего вихря вблизи вертикальной стенки. При небольших числах Re этот вихрь может занимать существенную часть сечения МЭЗ, но не простирается далеко вниз по течению от точки B . При увеличении числа Re область, занимаемая вихрем, существенно увеличивается вниз по потоку, но уменьшается по ширине.

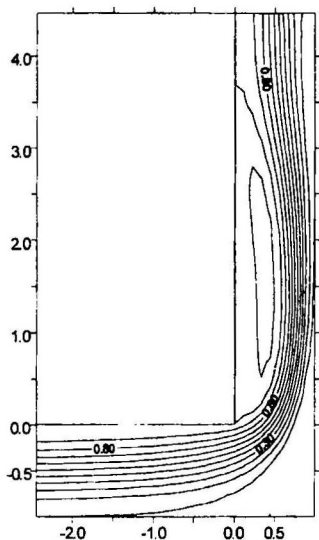


Рис. 4.

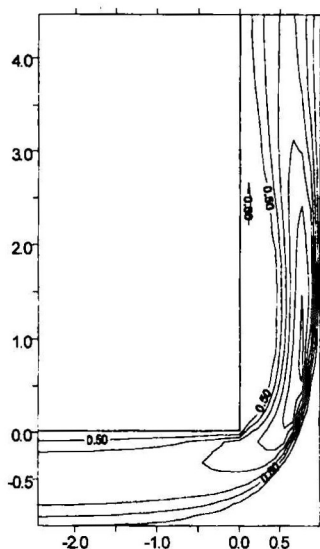


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клоков В.В. *Электрохимическое формообразование*. — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1983. — 80 с.
1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
2. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2*. — М.: Мир, 1991. — 552 с.